исследовать систему уравнений

$$\omega^{2t}_{2t-1} = a^{2t}_{2t-1,2t-1}\,\omega^{2t-1} + a^{2t}_{2t-1,2t}\,\omega^{2t} \quad (t=1,2,\dots,[\tfrac{n}{2}]).$$

Система ковариантов имеет вид

$$\Delta a^{2t}_{2t-1,2t-1}\wedge\omega^{2t-1} + \Delta a^{2t}_{2t-1,2t}\wedge\omega^{2t} = 0.$$

Легко убедиться в том, что исследуемая нами система уравнений находится в инволюции [6] с характерами

$$S_1 = S_2 = [\tfrac{n}{2}],\ S_3 = \dots = S_n = 0.$$

Таким образом, R-сеть Σ_n, удовлетворяющая условиям теоремы 2, существует в евклидовом пространстве E_n с произволом $[\frac{n}{2}]$ функций двух аргументов.

Библиографический список

1. Б а з ы л е в В.Т. К геометрии плоских многомерных сетей // Уч.зап./МГПИ им.В.И.Ленина.М.,1965.№ 243.С.29-37.

2. Б а з ы л е в В.Т. О многомерных сетях в евклидовом пространстве// Лит.мат.сб./ АН Лит.ССР.Вильнюс,1966.Т.6.№4. С.475-491.

3. Е в т у ш и к Л.Е., Л у м и с т е Ю.Г., Остиану Н.М., Широков А.П. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях// Проблемы геометрии/ ВИНИТИ. М.,1979.Т.9, С.5-246.

4. К у з ь м и н М.К. R-сети в евклидовом пространстве E_n.//Дифференциальная геометрия многообразий фигур:Сб.науч. тр./Калинингр.ун-т.Калининград,1982.Вып.13.С.50-53.

5. Н о р д е н А.П. Теория композиций // Проблемы геометрии/ ВИНИТИ. М.,1978.Т.10.С.117-145.

6. Ф и н и к о в С.П. Метод внешних форм Картана.М.-Л.: ГИТТЛ.1948.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып. 18 1987

УДК 514.75

КОНГРУЭНЦИИ ГИПЕРКВАДРИК С ФОКАЛЬНЫМИ КВАДРАТИЧНЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ

В.С. М а л а х о в с к и й

(Калининградский университет)

В n-мерном проективном пространстве P_n рассматривается ($n-1$)-мерное многообразие (конгруэнция) K_0 невырожденных гиперквадрик, каждая гиперквадрика Q которого содержит фокальный квадратичный элемент C [1]; причем гиперплоскости π квадратичных элементов образуют ($n-1$)-параметрическое семейство. Доказано, что конгруэнции K_0 существуют и определяются с произволом двух функций $n-1$ аргументов. Построено безынтегральное представление конгруэнций K_0 и конгруэнции C_0, описанной квадратичными элементами C. Для $n=3$ конгруэнции K_0 исследованы в [2].

§ 1. Теорема существования

Отнесем конгруэнцию K_0 к реперу $\{A_\alpha\}$ $(\alpha,\beta,\gamma=\overline{0,n})$, где A_0-характеристическая точка гиперплоскости π, A_n - полюс гиперплоскости π относительно гиперквадрики $Q\in K_0$, а вершины A_i $(i,j,k,p,q=\overline{1,n-1})$ попарно полярно сопряжены и полярно сопряжены с A_0 и A_n относительно Q. Репер $\{A_\alpha\}$ является автополярным репером первого рода гиперквадрики Q. При надлежащей нормировке его вершин уравнение гиперквадрики Q и уравнения квадратичного элемента C запишутся соответственно в виде

$$F \equiv -(x^0)^2 + \delta_{pq}x^p x^q + (x^n)^2 = 0, \qquad (1.1)$$

$$f \equiv -(x^0)^2 + \delta_{pq}x^p x^q = 0,\quad x^n = 0, \qquad (1.2)$$

где δ_{pq} -символ Кронекера.

Используя условия стационарности точки пространства P_n

$$dx^\alpha = -x^\beta \omega_\beta^\alpha + Q x^\alpha \qquad (\mathcal{D}\theta = 0) \;, \qquad (1.3)$$

где ω_β^α -компоненты деривационных формул репера $\{A_\alpha\}$, находим:

$$\left.\begin{aligned}\tfrac{1}{2}\, d\mathcal{F} = \theta\mathcal{F} + \omega_0^0 (x^0)^2 - \delta_{pq}\omega_k^q x^p x^k + (\omega_k^0 - \delta_{kp}\omega_0^p) x^0 x^k + \\ + (\omega_n^0 - \omega_0^n) x^0 x^n - (\delta_{kp}\omega_n^p + \omega_k^n) x^k x^n - \omega_n^n (x^n)^2.\end{aligned}\right\} \quad (1.4)$$

Следовательно, формы Пфаффа

$$\omega_i^0 - \omega_0^i ,\; \omega_i^n + \omega_n^i ,\; \omega_n^0 - \omega_0^n ,\; \omega_i^i - \omega_0^0 ,\; \omega_n^n - \omega_0^0 ,\; \omega_i^j - \omega_j^i \qquad (1.5)$$

являются структурными формами гиперквадрики $Q \in K_0$. Здесь и в дальнейшем $i \neq j$ и по индексам i и j суммирование не производится. Так как конгруэнция K_0 является (n-1)-мерным многообразием гиперквадрик Q, то ранг системы форм (1.5) равен $n-1$. Учитывая, что A_0 -характеристическая точка гиперплоскости π, получим

$$\omega_0^n = 0. \qquad (1.6)$$

Из уравнения

$$dx^n = (\theta - \omega_n^n) x^n - \omega_k^n x^k \qquad (1.7)$$

следует, что формы Пфаффа ω_i^n являются структурными формами гиперплоскости π. Следовательно,

$$\omega_1^n \wedge \omega_2^n \wedge \ldots \wedge \omega_{n-1}^n \neq 0, \qquad (1.8)$$

и мы можем принять эти формы Пфаффа за независимые первичные формы конгруэнции K_0. Обозначим

$$\omega_i = \omega_i^n ,\quad \omega^i = \omega_0^i . \qquad (1.9)$$

Из определения конгруэнции K_0 следует, что квадратичный элемент (1.2) принадлежит фокальному многообразию гиперквадрики Q. Значит,

$$d\mathcal{F}\big|_{x^n=0} \equiv \lambda f . \qquad (1.10)$$

Учитывая (1.4), получим

$$\omega_i^0 = \omega^i ,\quad \omega_i^j + \omega_j^i = 0 ,\quad \omega_i^i = \omega_0^0 . \qquad (1.11)$$

Используя условие эквипроективности пространства P_n и соотношения (1.11), получим

$$\omega_n^n + n\,\omega_0^0 = 0 .$$

Замыкая (1.6), получим

$$\omega_i \wedge \omega_n^0 = 0,\; \omega_j \wedge \omega_n^i + \omega_i \wedge \omega_n^j = 0,\; \omega_i \wedge \omega_n^i = 0 . \qquad (1.12)$$

Из первой группы этих квадратичных уравнений следует

$$\omega_n^0 = 0. \qquad (1.13)$$

Продолжая оставшиеся две группы уравнений (1.12), находим

$$\omega_n^i = m\,\omega_i . \qquad (1.14)$$

Дальнейшее продолжение приводит к одному уравнению Пфаффа

$$dm + 2(1+n)m\,\omega_0^0 = 0 , \qquad (1.15)$$

замыкание которого тождественно удовлетворяется в силу (1.6), (1.11). Так как нормировка всех вершин репера осуществлена, то форма Пфаффа ω_0^0 является главной, т.е.

$$\omega_0^0 = a^k \omega_k . \qquad (1.16)$$

Т е о р е м а 1.1. Конгруэнции K_0 существуют и определяются с произволом двух функций $n-1$ аргументов.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Замкнутая система дифференциальных уравнений конгруэнции K_0 состоит из уравнений Пфаффа

$$\left.\begin{aligned}\omega_0^n = 0,\;\; \omega_n^0 = 0,\;\; \omega_i^0 = \omega^i,\;\; \omega_i^j + \omega_j^i = 0,\;\; \omega_i^i = \omega_0^0, \\ \omega_n^i = m\omega_i,\;\; dm + 2(1+n)m\,\omega_0^0 = 0,\;\; \omega_0^0 = a^k\omega_k\end{aligned}\right\} \quad (1.17)$$

и двух внешних квадратичных уравнений

$$\omega^k \wedge \omega_k = 0 ,\quad \Delta a^k \wedge \omega_k = 0 , \qquad (1.18)$$

где

$$\Delta a^k = da^k + a^p \omega_p^k - a^k \omega_n^n . \qquad (1.19)$$

Анализируя эту систему, убеждаемся в справедливости этой теоремы.

§2. Инвариантная огибающая гиперквадрика

Рассмотрим пучок невырожденных гиперквадрик:

$$\Phi_h \equiv -(x^0)^2 + \delta_{pq} x^p x^q + hm\,(x^n)^2 = 0 , \qquad (2.1)$$

$$hm \neq 0 . \qquad (2.2)$$

Гиперквадрика Q выделяется из этого пучка при $h = \frac{1}{m}$. Пучок (2.1) образован гиперквадриками, касающимися друг друга вдоль квадратичного элемента C. Действительно, этот квадратичный

4 Зак. 1231

элемент содержится в каждой гиперквадрике пучка, и в любой его точке гиперквадрики (2.1) имеют общую касательную гиперплоскость. Наоборот, все невырожденные гиперквадрики, обладающие этим свойством, определяются уравнением (2.1) и неравенством (2.2). В пучке (2.1) содержится единственная инвариантная невырожденная гиперквадрика. Используя (1.3) и учитывая, что $h = const$, находим

$$d\Phi_h = 2(\theta - \omega^0_0)\Phi_h - 2m(1+h)\omega_k x^k x^n. \qquad (2.3)$$

Отсюда следует, что гиперквадрика $\Phi_h = 0$ инвариантна и невырожденна тогда и только тогда, когда

$$h = -1. \qquad (2.4)$$

Обозначим эту инвариантную гиперквадрику через Q_0. Из (2.4), (2.1) следует, что Q_0 определяется уравнением

$$\Phi \equiv \delta_{pq} x^p x^q - (x^0)^2 - m(x^n)^2 = 0. \qquad (2.5)$$

Т е о р е м а 2.1. Все гиперквадрики Q конгруэнции K_0 касаются инвариантной гиперквадрики Q_0 вдоль своих фокальных квадратичных элементов C.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как гиперквадрики Q и Q_0 содержатся в пучке (2.1), то они касаются друг друга вдоль квадратичного элемента C. Учитывая инвариантность гиперквадрики Q_0, убеждаемся в справедливости теоремы.

§ 3. Безынтегральное построение конгруэнции K_0

Обозначим через M_1, M_2 и E, E^* точки пересечения прямой A_0A_n соответственно с гиперквадриками Q_0 и Q. Имеем:

$$M_1 = A_n + \sqrt{-m}\,A_0, \quad M_2 = A_n - \sqrt{-m}\,A_0, \qquad (3.1)$$

$$E = A_n + A_0, \qquad E^* = A_n - A_0. \qquad (3.2)$$

Следовательно,

$$\left.\begin{aligned}(A_nA_0; M_1E)^2 = (A_nA_0; M_1E^*)^2 = (A_nA_0; M_2E)^2 = \\ = (A_nA_0; M_2E^*)^2 = -m.\end{aligned}\right\} \qquad (3.3)$$

Формулы (3.3) определяют геометрический смысл инварианта m.

Т е о р е м а 3.1. Для построения конгруэнции K_0 надо задать в пространстве P_n произвольную невырожденную гиперквадрику Q_0 и две произвольные гладкие гиперповерхности S и $\widehat{S}$. Пусть A_0 – произвольная точка гиперповерхности S, не

лежащая на гиперквадрике Q_0, π – касательная гиперплоскость к S в точке A_0. $C = \pi \cap Q_0$, A_n – полюс гиперплоскости относительно гиперквадрики Q_0, E_n – точка пересечения прямой A_0A_n с гиперповерхностью $\widehat{S}$, Q – гиперквадрика, касающаяся гиперквадрики Q_0 вдоль C и проходящая через точку E. Тогда конгруэнция (Q) гиперквадрик Q является конгруэнцией K_0.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость. Пусть конгруэнция гиперквадрик Q является конгруэнцией K_0. В репере $\{A_\alpha\}$, рассматриваемом в §1, гиперплоскость π фокального квадратичного элемента C касается гиперповерхности $(A_0) = S$ в точке A_0, гиперквадрика Q_0 определяется уравнением (2.5), а гиперквадрика Q – уравнением (1.1). Тогда поверхность $\widehat{S}$ задается уравнением

$$E = A_n + A_0, \qquad (3.4)$$

так как Q касается Q_0 вдоль C и проходит через точку E.

Достаточность. Пусть гиперквадрика Q конгруэнции (Q) касается одной невырожденной гиперквадрики Q_0 вдоль квадратичного элемента C, являющегося пересечением с Q_0 касательной гиперплоскости π к гладкой поверхности S в точке A_0, и проходит через точку E пересечения с другой гладкой поверхностью $\widehat{S}$ прямой A_0A_n, где A_n – полюс гиперплоскости π относительно Q_0.

Отнесем конгруэнцию (Q) к реперу $\{A_\alpha\}$, где A_i попарно полярно сопряжены друг с другом и с вершинами A_0 и A_n относительно Q_0 (а значит, и Q). Совмещая единичную точку прямой A_0A_n с точкой E, можно всегда так пронормировать оставшиеся вершины, чтобы гиперквадрики Q_0 и Q определялись соответственно уравнениями (2.5) и (1.1). Используя (1.3) находим:

$$\frac{1}{2}d\Phi = \theta\Phi + (\omega^0_k - \delta_{kp}\omega^p)x^0x^k - \delta_{pq}\omega^q_k x^p x^k + (m\omega_k - \delta_{kp}\omega^p_n)\omega^k\omega^n + \omega^0_0(x^0)^2 + (\omega^0_n + m\omega^n_0)x^0x^n + (m\omega^n_n - \tfrac{1}{2}dm)(x^n)^2. \qquad (3.5)$$

Так как гиперквадрика Q_0 инвариантная, то

$$d\Phi = \lambda\Phi. \qquad (3.6)$$

Сравнивая (3.5) с (3.6) и учитывая, что все вершины репера пронормированы, получим систему уравнений (1.17), (1.18), определяющую конгруэнцию K_0. Теорема доказана.

Обозначим через α (n-2)-мерную плоскость, полярно сопряженную относительно Q прямой $A_0 A_n$. Имеем

$$\alpha = (A_1 A_2 \ldots A_{n-1}) \qquad (3.7)$$

Т е о р е м а 3.2. Касательные гиперплоскости к гиперповерхностям (A_0) и (A_n) в точках A_0 и A_n содержат (n-2)-мерную плоскость α.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Имеем

$$dA_0 = \omega_0^0 A_0 + \omega^K A_K, \quad dA_n = \omega_n^K A_K + \omega_n^n A_n. \qquad (3.8)$$

В силу (3.7) подпространство α содержится в обеих касательных гиперплоскостях.

§4. Конгруэнция фокальных квадратичных элементов

Рассмотрим конгруэнцию C_0, образованную фокальными квадратичными элементами C. Фокальное многообразие квадратичного элемента $C \in C_0$ определяется из уравнений

$$f = 0, \; x^n = 0, \; df = 0, \; dx^n = 0. \qquad (4.1)$$

Учитывая (1.2), (1.3), приводим систему (4.1) к виду:

$$f = 0, \; x^n = 0, \; \omega_K \omega^K = 0. \qquad (4.2)$$

Следовательно, любая точка квадратичного элемента $C \in C_0$ является фокальной, т.е. конгруэнция C_0 является конгруэнцией квадратичных элементов с неопределенными фокальными многообразиями. Из теоремы 3.1 непосредственно вытекает, что конгруэнция C_0 имеет следующее безынтегральное представление. Пусть Q_0 - произвольная невырожденная гиперквадрика, а S - произвольная гладкая гиперповерхность. Квадратичные элементы конгруэнции C_0 образованы сечениями гиперквадрики Q_0 касательными гиперплоскостями к гиперповерхности S.

Библиографический список

1. М а л а х о в с к и й В.С. Поля геометрических объектов на многообразии квадратичных элементов//Геометрический сб./ Томский ун-т. Томск. 1964. Вып.4. С.26-36.

2. М а л а х о в с к и й В.С. Конгруэнции квадрик с фокальной конгруэнцией коник//Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Сб.науч.тр./Калинингр.ун-т. Калининград. 1976. Вып.7. С.54-60.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.18 1987

УДК 514.75

КОНГРУЭНЦИЯ ГИПЕРКВАДРИК В P_4

В.В. М а х о р к и н
(Калининградский университет)

В четырехмерном проективном пространстве рассматривается конгруэнция гиперквадрик. Выбор такого объекта исследования обуславливается тем, что это семейство гиперквадрик является одним из простейших, у которого трансверсальным образом возникают критические точки типа $S_{1,1}$ и, следовательно, фокальные точки второго порядка соответствующего типа.

Всякой конгруэнции гиперквадрик в P_4 естественным образом соответствует семейство [1] гиперквадрик. Пусть открытое множество $U \subset R^2$ является пространством параметров рассматриваемой конгруэнции, тогда двухпараметрическое семейство гиперквадрик, соответствующее рассматриваемой конгруэнции, будет [1] пятимерным подмногообразием Z в $U \times P_4$ вместе с проекцией на первый сомножитель

$$p: Z \to U, \qquad (1)$$

кроме того, имеется проекция на второй сомножитель

$$\pi: Z \to P_4. \qquad (2)$$

Для всякого $t \in U$ $\pi(p^{-1}(t)) \subset P_4$ является гиперквадрикой рассматриваемой конгруэнции, соответствующей параметру $t \in U$. Имеем

$$Z = S_0(\pi) \cup S_1(\pi), \qquad (3)$$

где $S_0(\pi)$ множество регулярных точек отображения (2), а $S_1(\pi)$ множество особых точек коранга один отображения (2), причем в общем случае $S_0(\pi)$ и $S_1(\pi)$ подмногообразия в Z. Нетрудно показать [2], что $S_1(\pi)$ является трехмерным подмногообразием в Z. Из (3) следует

$$\pi_1(Z) = \pi(S_0(\pi)) \cup \pi(S_1(\pi)). \qquad (4)$$